

TESTE DE HIPÓTESE POR BOOTSTRAP PARA O PARÂMETRO DE DEPENDÊNCIA EM UM MODELO EXPONENCIAL BIVARIADO.

Elizabeth Mie Hashimoto, Mário Hissamitsu Tarumoto – Probabilidade e Estatística – Estatística – Departamento de Matemática, Estatística e Computação – Faculdade de Ciências e Tecnologia – Campus de Presidente Prudente.

A distribuição exponencial bivariada tem sido extensamente explorada na literatura, pois descreve dados pareados com o objetivo de explicar uma possível associação entre os tempos de sobrevivência até as falhas (ACHCAR & LEANDRO, 1996). Diversas destas distribuições foram propostas, devido às propriedades com interpretações físicas simples e úteis. Uma delas foi proposta por Block e Basu (1974) que apresentaram uma distribuição exponencial bivariada absolutamente contínua, cujas distribuições marginais são médias ponderadas de exponenciais e conserva as propriedades de falta de memória conjunta.

A distribuição exponencial bivariada de Block – Basu com parâmetros I_1 , I_2 e I_3 , para os tempos de vida T_1 e T_2 tem a função densidade de probabilidade dada por:

$$f(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{I_1 I_2 I_{23}}{I_{12}} \exp(-I_1 t_1 - I_{23} t_2), & \text{se } t_1 < t_2 \\ \frac{I_2 I_3 I_{13}}{I_{12}} \exp(-I_{13} t_1 - I_2 t_2), & \text{se } t_1 \geq t_2 \end{cases},$$

sendo $I_{12} = I_1 + I_2$, $I_{13} = I_1 + I_3$, $I_{23} = I_2 + I_3$ e $I = I_1 + I_2 + I_3$.

A função sobrevivência conjunta da distribuição exponencial bivariada absolutamente contínua para os tempos de vida T_1 e T_2 é expressa por:

$$S(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{I}{I_{12}} \exp(-I_1 t_1 - I_{23} t_2) - \frac{I_3}{I_{12}} \exp(-I t_2), & \text{se } t_1 < t_2 \\ \frac{I}{I_{12}} \exp(-I_{13} t_1 - I_2 t_2) - \frac{I_3}{I_{12}} \exp(-I t_1), & \text{se } t_1 \geq t_2 \end{cases}.$$

O modelo é interessante principalmente pela forma analítica que incorpora em sua estrutura um parâmetro que mede o grau de associação entre as variáveis, sendo este, o parâmetro I_3 .

Podemos observar pela figura 1 que quando o valor do parâmetro I_3 é muito próximo de zero, a distribuição da estimativa de I_3 é assimétrica. Dessa forma, estamos interessados em verificar se para um valor próximo de zero, podemos assumir que $I_3 = 0$.

Assim, sabendo que o espaço paramétrico de I_3 é definido como $\Omega = \{I_3 : I_3 \geq 0\}$, temos interesse em testar a hipótese:

$$H_0 : I_3 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : I_3 > 0.$$

A rejeição da hipótese nula H_0 em favor da hipótese alternativa H_1 leva a conclusão de que as variáveis aleatórias T_1 e T_2 são independentes e a análise estatística e interpretações sobre os tempos de vida podem ser feitas separadamente. Entretanto, em situações como apresentados na figura 1, os métodos clássicos de teste de hipótese não são adequados, uma vez que o parâmetro de interesse está próximo à fronteira do espaço paramétrico. Nesta situação, podemos aplicar o teste de hipótese *Bootstrap*. O *Bootstrap* é um método de simulação que se baseia na construção da distribuição amostral por reamostragem, e foi recentemente desenvolvida por causa do moderno poder computacional (EFRON & TIBSHIRANI, 1993).

Considere X como a amostra original e X^* como a amostra *bootstrap*. Então, teste para tomada de decisão é baseado p – valor exato obtido através do método *Bootstrap* é dado por:

$$p - \text{valor exato} = \text{Prob}_{H_0} \left\{ t(x^*) \geq t(x) \right\}.$$

Ou seja, a probabilidade, sob H_0 de que os valores de $t(x^*)$, nas reamostragens *bootstrap* sejam maiores do que o valor na amostra original $t(x)$. Assim, podemos estimar o p – valor exato pela razão entre o numero de vezes que ocorre o evento $t(x^*) \geq t(x)$ e as B amostras *bootstrap* geradas. Dessa forma, tomando α como nível mínimo de significância em torno de 5% ou 1%, rejeitamos H_0 se o p – valor exato for menor que α fixando inicialmente.

Algoritmo para estimar o p – valor exato:

1. Selecionar B amostras *bootstrap* de tamanho n , retirada com reposição a partir da amostra original X .
2. Calcular o $t_{obs} = t(x)$ a partir da amostra original.
3. Calcular em cada amostra *bootstrap* a estimativa correspondente $t(x^{*b})$.
4. Se $t(x^{*b}) \geq t_{obs}$, então o contador recebe o valor 1.
5. Estima-se o p – valor exato por:

$$p - \text{valor exato} = \frac{\# \left\{ t(x^{*b}) \geq t_{obs} \right\}}{B},$$

sendo t_{obs} o valor observado da amostra original e $t(x^{*b})$ o valor observado da b -iésima reamostragem *bootstrap*; $b = 1, 2, \dots, B$.

Com base no algoritmo, iremos estimar um p – valor exato para tomada de decisão das hipóteses com diferentes valores do parâmetro de associação I_3 da distribuição exponencial bivariada de Block – Basu com. Até o momento, o trabalho se encontra na fase de programação, mas alguns resultados indicam que para I_3 muito próximo de zero, não rejeitamos a hipótese de nulo H_0 .

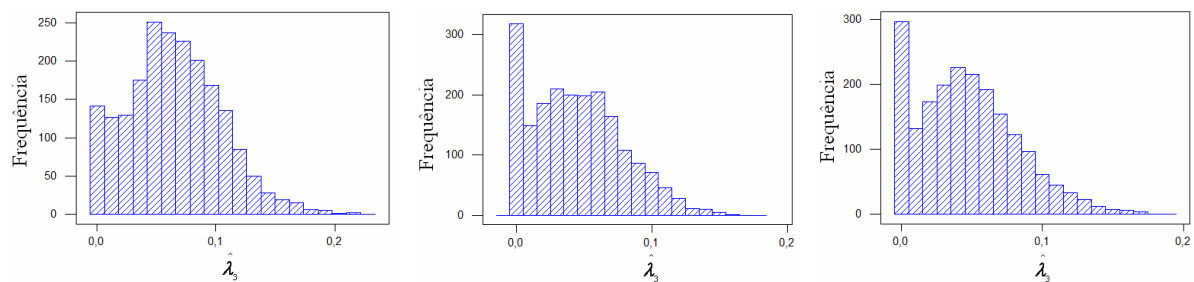


Figura1: Histogramas das estimativas de Máxima Verossimilhança para tamanho de amostra $n = 100$ com observações não censuradas, com percentual de censura de 30% associada a (t_1, t_2) e com percentual de censura associada a t_1 de 10% e t_2 de 30%, respectivamente.

REFERÊNCIAS

ACHCAR, J. A.; LEANDRO, R. A. Generation of bivariate lifetime data assuming the Block & Basu exponential distribution. *Revista de Matemática e Estatística*, São Paulo, v.14, p.43-52, 1996.

BASU, P.A.; BLOCK, H.W. A continuous bivariate exponential extension. *Journal of the American Statistical Association*, v.69, n.348, p.1031-1037, dez., 1974.

EFRON, B.; TIBSHIRANI, R.J. *An introduction to the bootstrap*, volume 57 of Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman and Hall, New York, 1993.

PRESOTTI, C. V. *Uma modificação da extensão do algoritmo AID para modelos lineares generalizados usando reamostragem Bootstrap*. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos.

FAPESP